TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

22. ULUSAL ORTAOKUL MATEMATİK OLİMPİYATI BİRİNCİ AŞAMA SINAV SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2017

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. 6054 basamaklı $A = \underbrace{111...1}_{2017}\underbrace{222...2}_{2018}5\underbrace{000...0}_{2018}$ sayısı veriliyor.
$\sqrt{A}$ sayısının rakamları toplamı kaçtır?

Cevap: 6056. A sayısının basamak çözümlemesi yapıldığında $10^{4037} \cdot \dfrac{10^{2017}-1}{9} + 2 \cdot 10^{2019} \cdot \dfrac{10^{2018}-1}{9} + 5 \cdot 10^{2018}$ olduğu görülebilir. Buradan, $A = 10^{2018} \cdot \dfrac{10^{4036} - 10^{2019} + 2 \cdot 10^{2019} - 20 + 45}{9} = \left(10^{1009} \cdot \dfrac{10^{2018}+5}{3}\right)^2$ olur. Dolayısıyla $\sqrt{A} = \underbrace{333\ldots333}_{2017}5\underbrace{00\ldots00}_{1009}$ olup, rakamları toplamı $3 \cdot 2017 + 5 = 6056$ olur.

2. 105^9 doğal sayısının pozitif bölenlerinin kaç tanesi 9, 25, 49 doğal sayılarından en az ikisine tam bölünür?

Cevap: 896. Öncelikle, 105^9 doğal sayısının tüm pozitif tam bölenleri $0 \leq a, b, c, d \leq 9$ olmak üzere $3^a5^b7^c$ şeklindedir. Soruda istenen koşul ise, a, b, c tam sayılarının en az ikisinin 2 den büyük veya eşit olmasıdır. Dolayısıyla istenmeyen durumların sayısı

$$\underbrace{2^3}_{\text{her birinin 2 den küçük olması}} + \underbrace{3 \cdot 8 \cdot 2^2}_{\text{tam olarak birinin 2 den büyük veya eşit olması}} = 104 \text{ olur.}$$

Tüm durumların sayısı da 10^3 olduğundan cevap $1000 - 104 = 896$ olur.

3. $ABCD$ dikdörtgeninin AB kenarı $x-$ekseni üzerindedir. Dikdörtgenin C ve D noktaları sırasıyla $x - 2y = -4$ ve $x + 3y = 6$ doğruları üzerindedir ve C noktası koordinat düzleminin I. bölgesindedir. $Çevre(ABCD) = 16$ ise $Alan(ABCD) =?$

Cevap: 15. AB kenarı $x-$ekseni üzerinde olduğundan A ve B noktalarının koordinatları $(a, 0)$ ve $(b, 0)$ şeklindedir. $ABCD$ bir dikdörtgen olduğundan C ve D noktalarının koordinatları (b, c) ve (a, c) şeklinde olur. Soruda verilen koşullardan

- $|a - b| + |c| = 8$
- $b > 0$, $c > 0$, $a < b$
- $b - 2c = -4$
- $a + 3c = 6$

elde edilir. Buradan, $a = -3$, $b = 2$, $c = 3$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak, $Alan(ABCD) = 5 \cdot 3 = 15$ olur.

4. $$\left.\begin{aligned} xy + 3zw &= 1 \\ xz - yw &= 2 \end{aligned}\right\}$$
sistemini gerçekleyen tüm (x, y, z, w) tam sayı dörtlülerinin sayısı kaçtır?

Cevap: 4. Verilen iki eşitlikten birincinin karesi ile ikincinin karesinin üç katını taraf tarafa topladığımızda $(xy)^2+9(zw)^2+3(xz)^2+3(yw)^2 = 13$ elde ederiz. Buradan $|xy| \leq 3$ olduğu görülür. Diğer taraftan, birinci eşitlikten $xy \equiv 1 \pmod 3$ olduğu için sadece $xy = 1$ veya $xy = -2$ olabilir.

- $xy = 1$ ise, $zw = 0$ ve $(xz)^2 + (yw)^2 = 4$ elde ederiz. Ayrıca $xz - yw = 2$ olduğundan $xz = 2, yw = 0$ veya $xz = 0, yw = -2$ olabilir. Buradan, $(1, 1, 2, 0)$, $(-1, -1, -2, 0)$, $(1, 1, 0, -2)$ ve $(-1, -1, 0, 2)$ çözümleri gelir.
- $xy = -2$ ise, $zw = 1$ elde ederiz. Buradan, x, y, z, w nin hepsinin sıfırdan farklı olduğu sonucu çıkar, bu da $(xy)^2+9(zw)^2+3(xz)^2+3(yw)^2 = 13$ eşitliği ile çelişir.

Sonuç olarak verilen sistemi gerçekleyen 4 tane tam sayı dörtlüsü vardır.

5. xyz rakamları farklı üç basamaklı bir tek sayıdır. Kenar uzunlukları x, y, z olan bir üçgen çizilebildiğine göre üç basamaklı tüm xyz sayılarının sayısı kaçtır?

Cevap: 104. xyz bir tek sayı olduğundan $z = 1, 3, 5, 7, 9$ olabilir. $z = 1$ olduğunda üçgen eşitsizliğinden $|x - y| < 1$ olması gerekir, bu da rakamları farklı olması koşuluyla çelişir. Diğer taraftan, $x < y$ olan çözümlerin sayısını bulduğumuzda cevabımız bu sayının iki katı olacaktır, dolayısıyla $x < y$ varsayabiliriz.

- $z = 3$ ise, $y - x \in \{1, 2\}$, $x, y \neq 3$ ve $x + y \geq 4$ olmalıdır. $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(5, 7)$, $(6, 7)$, $(6, 8)$, $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(8, 9)$ olmak üzere 10 çözüm gelir.
- $z = 5$ ise, $y - x \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x, y \neq 5$ ve $x + y \geq 6$ olmalıdır. $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(4, 7)$, $(4, 8)$, $(6, 7)$, $(6, 8)$, $(6, 9)$, $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(8, 9)$ olmak üzere 14 çözüm gelir.
- $z = 7$ ise, $y - x \notin \{7, 8, 9\}$, $x, y \neq 7$ ve $x + y \geq 8$ olmalıdır. $(2, 6)$, $(2, 8)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(3, 8)$, $(3, 9)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(4, 8)$, $(4, 9)$, $(5, 6)$, $(5, 8)$, $(5, 9)$, $(6, 8)$, $(6, 9)$, $(8, 9)$ olmak üzere 16 çözüm gelir.

- $z = 9$ ise, $y - x \neq 9$, $x, y \neq 9$ ve $x + y \geq 10$ olmalıdır. $(2,8)$, $(3,7)$, $(3,8)$, $(4,6)$, $(4,7)$, $(4,8)$, $(5,6)$, $(5,7)$, $(5,8)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(7,8)$ olmak üzere 12 çözüm gelir.

Dolayısıyla toplam $2 \cdot (10 + 14 + 16 + 12) = 104$ sayı vardır.

6. Üç farklı rakamdan oluşan beş basamaklı kaç farklı şifre oluşturulabilir? (şifre sıfır ile de başlayabilir)

Cevap: 18000. Öncelikle şifremizde yer alacak 3 farklı rakam adayını $\binom{10}{3}$ şeklinde seçebliriz. Daha sonra, içerme-dışarma prensibinden bu üç rakamı içerebilecek tüm beş basamaklı şifrelerin sayısından bunlardan sadece iki tanesini içerenleri çıkarıp, tam olarak bir tane içerenlerin sayısını eklemeliyiz. Dolayısıyla cevap $\binom{10}{3} \cdot \left(3^5 - \binom{3}{2} \cdot 2^5 + \binom{3}{1} \cdot 1^5\right) = 18000$ olur.

7. Tabanı $|BC| = a$ olan ABC ikizkenar üçgeninde, D ve E sırasıyla BC ve AC kenarlarının orta noktalarıdır. $|AD| = |DE|$ ise $Alan(ABC) =?$

Cevap: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$. D ve E bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan $DE \parallel AB$ olur. Buradan, $|DE| = \dfrac{1}{2}|AB| = \dfrac{1}{2}|AC| = |EC|$ elde ederiz, bu da $s(\widehat{DAC}) = s(\widehat{DEA}) = 2 \cdot s(\widehat{ACD})$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $s(\widehat{ACD}) = 30°$ buluruz. ABC üçgeni $120° - 30° - 30°$ üçgeni olduğundan, sinüs alan teoreminden $Alan(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ olur.

8. x, y, z, w negatif olmayan tam sayılardır.

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 28$$

denklemini gerçekleyen tüm (x, y, z, w) dörtlülerinin sayısı kaçtır?

Cevap: 12. Dört tane negatif olmayan tam sayının kareleri toplamı 28 ise, bu tam sayı dörtlüleri $(5,1,1,1)$, $(4,2,2,2)$ ve $(3,3,3,1)$ olabilir. Dolayısıyla toplam $3 \cdot \dfrac{4!}{3!} = 12$ tam sayı dörlüsü vardır.

9. a ve b sıfırdan farklı tam sayılardır. $(a^2-b)(a-b^2)=(a+b)^3$ denklemini gerçekleyen kaç farklı (a,b) ikilisi vardır?

Cevap: 8. Verilen eşitlikte a^3+b^3 terimini her iki taraftan çıkardığımızda $(-ab)\cdot(ab+1)=3ab(a+b)$ elde ederiz. Buradan $ab\cdot(ab+3a+3b+1)=0$ bulunur. a ve b sıfırdan farklı olduğundan $ab+3a+3b+1=0$ olur, bu da $(a+3)\cdot(b+3)=8$ olduğunu gösterir. $8=2^3$ sayısının tam sayı bölenlerinin sayısı 8 olduğundan ve her bir bölen bir (a,b) ikilisi vereceğinden cevap 8 olur.

10. 25 adet özdeş bilye, 25 adet özdeş kalem, 25 adet özdeş silgi ve 25 adet özdeş defter 2 kişi arasında ve her birinde 50 adet olacak şekilde kaç farklı biçimde paylaştırılır?

Cevap: 11726. Birinci kişi a tane bilye, b tane kalem, c tane silgi, d tane defter alsın. $a+b+c+d=50$ ve $0\le a,b,c,d\le 25$ şartlarını sağlayan (a,b,c,d) doğal sayı dörtlülerinin sayısını bulmalıyız. Öncelikle $a+b+c+d=50$ şartını sağlayan doğal sayı dörtlülerinin sayısı $\binom{50+4-1}{4-1}$ olur. Bunlardan $0\le a,b,c,d\le 25$ şartını sağlamayanları çıkarmalıyız. a, b, c, d den en fazla biri şartı sağlayamayacağından, genelliği bozmadan $a\ge 26$ dersek, $x+b+c+d=24$ şartını sağlayan doğal sayı dörtlülerini saymalıyız. Buradan cevabın $\binom{53}{3}-\binom{4}{1}\cdot\binom{27}{3}=11726$ olduğu görülür.

11. Tepe açısı $\widehat{A}$ olan ABC ikizkenar üçgeninde BC, AC, AB kenarları üzerindeki açıortay ayakları sırasıyla P, R, S olsun. P, R, A, S noktalarından bir çember geçmektedir. $|BC|=2$ ise $|AB|=?$

Cevap: $\dfrac{\sqrt{17}+1}{4}$. $|AB|=|AC|=x$ ve $|BS|=y$ diyelim. Açıortay teoreminden $\dfrac{x}{x-y}=\dfrac{2}{y}$ olur, buradan $y=\dfrac{2x}{x+2}$ elde ederiz. Diğer taraftan, P, R, A, S noktalarından çember geçmesi $s(\widehat{SPB})+s(\widehat{RPC})=s(\widehat{A})$ olması anlamına gelir. ABC ikizkenar olduğundan $s(\widehat{SPB})=\dfrac{s(\widehat{A})}{2}=s(\widehat{BAP})$ olup ABP ve PBS üçgenleri benzer bulunur. Buradan $|BP|^2=|BS|\cdot|BA|$ eşitliğini elde ederiz, dolayısıyla $2x^2=x+2$ olup $x=\dfrac{\sqrt{17}+1}{4}$ bulunur.

12. $f(2) = 1$ ve $\forall n = 1, 2, 3, 4.....$ için $f(2n) = 2f(n)$, $f(2n+1) = 2f(n) + 1$ ise $f(121) =?$

Cevap: 89. $f(121) = 2f(60) + 1 = 8f(15) + 1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $f(15) = 2f(7) + 1 = 4f(3) + 3 = 8f(1) + 7$ ve $f(1) = \dfrac{f(2)}{2}$ olduğundan, $f(1) = \dfrac{1}{2}$ ve $f(15) = 11$ bulunur. Buradan $f(121) = 8 \cdot 11 + 1 = 89$ olur.

13. $1333555557777777999999999\underbrace{11...11}_{\text{11 tane 11}}\underbrace{13...13}_{\text{13 tane 13}}...$

biçiminde devam eden sayının soldan 2017 nci rakamı kaçtır?

Cevap: 3. Öncelikle sayının ilk $1+3+5+7+9 = 25$ basamağından sonra iki basamaklı n doğal sayısı tam olarak $2n$ tane basamağı doldurur. Dolayısıyla, $2\Big(11 + 13 + ... + (2m-1)\Big) < 2017 - 25$ olan en büyük m doğal sayısını bulmalıyız. Buradan $m^2 < 1021$ ve $m \leq 31$ elde ederiz. Sonuç olarak, sayımız 1897 nci basamaktan sonra 6363... şeklinde ilerler ve 6464... şeklinde ilerlediği kısım 2017 nci basamaktan sonradır. $2017 - 1897 = 120$ çift sayı olduğundan cevap 3 olur.

14. $A = \Big\{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2017}) : k = 1, 2, 3, \ldots, 2017$ için $x_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\Big\}$ kümesinin elemanlarının kaç tanesinde tek sayıda 5 rakamı vardır?

Cevap: $\dfrac{10^{2017} - 8^{2017}}{2}$. A kümesinin tam olarak k tane 5 içeren $\dbinom{2017}{k} \cdot 9^{2017-k}$ tane elemanı olduğundan, soruda istelen şartı sağlayan elemanların sayısını $\displaystyle\sum_{k \text{ tek}} \binom{2017}{k} \cdot 9^{2017-k}$ olarak hesaplayabiliriz. Bu toplamın $\dfrac{(9+1)^{2017} - (9-1)^{2017}}{2} = \dfrac{10^{2017} - 8^{2017}}{2}$ olduğu açıktır.

15. O merkezli, çapı $|AB| = 12$ olan bir çember veriliyor. A ve B noktalarında bu çembere dıştan teğet $r = 2$ yarıçaplı iki çember çiziliyor. A ve B noktalarından geçen AB doğrusu üzerinde $|KO| = |OL| = 12$ olacak şekilde birbirinden farklı K ve L noktaları alınıyor. K noktasından L noktasına çemberlerin içinden geçmeyen en kısa mesafe kaçtır?

Cevap: $2\pi + 12\sqrt{3}$. K ve L noktalarından büyük çembere çizilen teğetlerden AB doğrusuna göre aynı tarafta olanlarının değme noktaları sırasıyla M ve N olsun. $r = 2$ yarıçaplı çemberlerden K ye daha yakın olanın merkezi O_1, L ye daha yakın olanın merkezi O_2 olsun. $\dfrac{|KO_1|}{|KO|} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{r}{6}$ olduğundan O_1 den KM doğrusuna inen dik, O_1 merkezli çember üzerinde yer alır, bu da KM nin O_1 merkezli çembere de teğet olduğu gösterir. Benzer şekilde, LN doğrusu O_2 merkezli çembere teğet olur. Dolayısıyla, K noktasından L noktasına çemberlerin içinden geçmeyen en kısa yol K den M ye doğru parçası, MN yayı ve N den L ye doğru parçasının birleşimidir. $OM \perp MK$ ve $|OK| = 2|OM|$ olduğundan MOK üçgeni $90° - 60° - 30°$ üçgeni olur. Aynı şekilde, NOL üçgeni de $90° - 60° - 30°$ üçgeni olur. Buradan, MN yayı merkez ile $60°$ açısı yapar. Sonuç olarak, en kısa mesafe,

$$2 \cdot 6\sqrt{3} + \frac{(2\pi \cdot 6) \cdot 60}{360} = 12\sqrt{3} + 2\pi \text{ olarak bulunur.}$$

16. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{9}$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y) pozitif tam sayı ikilileri vardır?

Cevap: 2. Verilen eşitlikte paydaları eşitleyip içler-dışlar çarpımı yaparsak, $xy - 9y + 9x = 0$ elde ederiz. Buradan, eşitliğin her iki tarafından 81 çıkarırsak, $(x-9)(y+9) = -81$ olduğu görülür. x ve y pozitif tam sayı olduğundan, sadece $y+9 = 27$, $x-9 = -3$ ve $y+9 = 81$, $x-9 = -1$ olabilir. Sonuç olarak, $(x, y) = (6, 18)$ veya $(x, y) = (8, 72)$ olacağından cevap 2 olur.

17. Dört basamaklı bir sayının birler basamağı silindiğinde tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir, ayrıca bu sayının binler basamağı silindiğinde de tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir. Bu özelliklere sahip dört basamaklı kaç farklı doğal sayı vardır?

Cevap: 6. Üç basamaklı bir sayı tam kare ise, bu sayının ilk iki rakamı 10, 12, 14, 16, 19, 22, 25, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 57, 62, 67, 72, 78, 84, 90, 96 olabilirken son iki rakamı ise 00, 21, 24, 25, 29, 41, 44, 56, 61, 69, 76, 84, 89, 96 olabilir. $\overline{bc}$ iki basamaklı sayısı, hem üç basamaklı bir tam karenin ilk iki rakamı, hem de başka üç basamaklı bir tam karenin son iki rakamı olacağından $\overline{bc} = 25, 44, 84, 96$ olabilir. İncelediğimizde, soruda verilen şartı sağlayan dört basamaklı sayıların sadece 1441, 1961, 2256, 4841, 6256, 7841 olabileceği görülür.

18. Rakamları toplamı 25 olan 6 basamaklı sayıların kaç tanesinin birler, onlar ve yüzler basamağındaki rakamlar 5'ten küçük iken diğer basamaklardaki rakamları en az 5 olmaktadır?

Cevap: 1506. Sayımız $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ olsun. $1 \leq i \leq 3$ için $b_i = a_i - 5$ ve $4 \leq i \leq 6$ için $b_i = a_i$ dersek, $1 \leq i \leq 6$ için $0 \leq b_i < 5$ ve $b_1+b_2+...+b_6 = 10$ şartını sağlayan altılıların sayısını bulmalıyız. Öncelikle $b_1+b_2+...+b_6 = 10$ şartını sağlayan $\binom{10+6-1}{6-1}$ tane doğal sayı altılısı vardır. $1 \leq i \leq 6$ için $0 \leq b_i < 5$ şartını sağlanmıyorsa, ya tam olarak bir tane $1 \leq i \leq 6$ için $b_i \geq 5$ olabilir, ya da bu altı sayıdan tam olarak 2 tanesi 5, diğerleri 0 olabilir. Dolayısıyla, $\binom{15}{5}$ tane altılıdan $\binom{6}{1} \cdot \binom{5+6-1}{6-1} - \binom{6}{2}$ tanesi istenilen şartı sağlamaz. Sonuç olarak, $\binom{15}{5} - \binom{6}{1} \cdot \binom{10}{5} + \binom{6}{2} = 1506$ tane altılı bulunur.

19. $s(\widehat{A}) = 60°$ olan ABC üçgeninde $|AB| < |AC|$ dir. BD ve CE açıortay olacak şekilde AC ve AB kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. BD ve CE kenarlarının kesişimi F ise $\dfrac{|DF|}{|EF|} =?$

Cevap: 1. F noktası iç açıortayların kesişim noktası olduğundan $s(\widehat{EFD}) = s(\widehat{BFC}) = 90° + \dfrac{s(\widehat{A})}{2} = 120°$ bulunur. Dolayısıyla, $AEFD$ dörtgeni kirişler dörtgeni olur. Buradan, $s(\widehat{EDF}) = s(\widehat{EAF}) = 30° = s(\widehat{DAF}) = s(\widehat{DEF})$ olup, $|DF| = |EF|$ olur.

20. $x + \dfrac{1}{x} = 1$ ise $x^{2017} + x^{3017} - x^{4017} =?$

Cevap: 2. Verilen eşitlikten $x^2 - x + 1 = 0$ elde edilir. Buradan, $x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1) = 0$ eşitliğinden $x^3 = -1$ bulunur. Dolayısıyla, istenen ifade $x^{2017}+x^{3017}-x^{4017} = (x^3)^{672}\cdot x+(x^3)^{1005}\cdot x^2-(x^3)^{1339} = x-x^2+1 = 1+1 = 2$ olarak bulunur.

21. $A = 1 \cdot 2017 + 3 \cdot 2015 + 5 \cdot 2013 + ... + 2013 \cdot 5 + 2015 \cdot 3 + 2017 \cdot 1$ olmak üzere $A+1009\cdot 2019$ toplamının farklı asal bölenlerinin toplamı kaçtır?

Cevap: 1454. Öncelikle $A = \sum_{n=0}^{1008}(2n+1)(2017-2n) = \sum_{n=0}^{1008} 1009^2 - (2n-1008)^2$ yazabiliriz. Dolayısıyla $A = 1009 \cdot 1009^2 - 8 \cdot \sum_{n=0}^{504} n^2$ olur. Her k pozitif tam sayısı için $\sum_{n=0}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ olduğundan, $p = 1009$ dersek,

$$A + 1009 \cdot 2019 = p^3 - 8 \cdot \frac{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot p}{6} + p(2p+1) = \frac{p(2p+4)(p+1)}{3}$$

olur. Sonuç olarak $A + 1009 \cdot 2019 = 1009 \cdot 2 \cdot 337 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ elde ederiz. Dolayısıyla bu sayının farklı asal bölenlerinin toplamı $1009 + 337 + 2 + 5 + 101 = 1454$ olur.

22. Bir torbada 1'den 10'a kadar numaralanmış aynı büyüklükte 10 top vardır. Ali torbadan rastgele bir top çekip, numarasının x olduğunu söylüyor ve torbaya geri atıyor. Sonra Ayşe torbadan rastgele bir top çekiyor ve numarasının y olduğunu söylüyor (y, x de olabilir). Bu durumda $6 < |3x - 2y| < 18$ eşitsizliğinin gerçekleşme olasılığı kaçtır?

Cevap: $\frac{47}{100}$. Öncelikle $1 \leq x, y \leq 10$ şartını sağlayan $10 \cdot 10 = 100$ tane farklı (x, y) ikilisi vardır. Bunlardan kaç tanesinin $7 \leq 3x - 2y \leq 17$ veya $-7 \geq 3x - 2y \geq -17$ şartını sağladığını bulmalıyız.

- $7 \leq 3x - 2y \leq 17$ ise, $\frac{2y+7}{3} \leq x \leq \frac{2y+17}{3}$ olabilir. Buradan, $y = 1, 2, 4, 5, 7$ ise 4 farklı x değeri, $y = 3, 6, 8$ ise 3 farklı x değeri, $y = 9, 10$ ise 2 farklı x değeri bulunur.
- $-7 \geq 3x - 2y \geq -17$ ise, $\frac{2y-17}{3} \leq x \leq \frac{2y-7}{3}$ olabilir. Buradan, $y = 5, 6$ için 1 farklı x değeri, $y = 7$ için 2 farklı x değeri, $y = 8, 9$ için 3 farklı x değeri, $y = 10$ için 4 farklı x değeri bulunur.

Dolayısıyla toplam $33 + 14 = 47$ farklı (x, y) ikilisi vardır ve sonuç olarak soruda istenilen eşitsizliğin gerçekleşme olasılığı $\frac{47}{100}$ olur.

23. $|AB| = 8$, $|BC| = 6$ olan $ABCD$ dikdörtgeni veriliyor. ACD üçgeninin O merkezli iç teğet çemberi çiziliyor. O merkezli çembere ve AB, AC doğrularına teğet olan çemberin yarıçapı kaçtır?

Cevap: $\frac{4}{3}$. Öncelikle O merkezli iç teğet çemberin yarıçapı $\dfrac{|AD|+|DC|-|AC|}{2} = 2$ olarak bulunur. Çizilen yeni çemberin merkezi M, yarıçapı r, ve çemberlerin AC doğrusuna teğet oldukları ortak nokta K olsun. MA ve OC doğruları sırasıyla $\widehat{BAC}$ ve $\widehat{ACD}$ nin açıortaylarıdır. Ek olarak, $AB \parallel CD$ olduğundan $MA \parallel OC$ elde ederiz. Buradan, $\dfrac{|AK|}{|KC|} = \dfrac{r}{2}$ olur. $|AK| = \dfrac{|AD|+|AC|-|CD|}{2} = 4$ olduğundan $\dfrac{|AD|}{|DC|} = \dfrac{4}{6}$ olup, buradan $r = \dfrac{4}{3}$ bulunur.

24.
$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-\frac{2xy}{x-y} &= 1 \\ \sqrt{x-y} &= x^2+5y \end{aligned}\right\}$$
sistemini gerçekleyen tüm (x, y) gerçel sayı ikilileri içinde $x.y$ çarpımının maksimum değeri kaçtır?

Cevap: 42. Verilen ilk eşitlikten, $(x-y)^2 + 2xy - \dfrac{2xy}{x-y} = 1$ elde ederiz. Buradan, $(x-y-1)(x-y+1) = (-2xy)\cdot\dfrac{x-y-1}{x-y}$ olur. Eğer $x-y \neq 1$ ise, $x-y+1 = \dfrac{-2xy}{x-y}$ olur, buradan $x-y = -(x^2+y^2) \leq 0$ elde ederiz. İkinci eşitlikten $x-y \geq 0$ olduğundan tek durum $x=y=0$ olur, bu da ilk eşitliği sağlamaz. Dolayısıyla $x-y=1$ elde ederiz, buradan ikinci eşitlikten $x^2+5y=1$ olacağı için, $x^2+5x-6=0$ buluruz. Bu da $x=-6$, $y=-7$ veya $x=1$, $y=0$ çözümleri gelir. Sonuç olarak xy nin maksimum değeri 42 olur.

25. Ali evdeki geri alınmış saate göre 07:42 de evden ayrılıp, sabit bir hızla bisikletiyle okula vardığında okuldaki saatin 08:22 olduğunu görüyor. Okulun saati ile saat 15:00 te okuldan eve doğru bisikletiyle geliş hızının 3 katı ile geri dönüyor ve evdeki saatin 14:56 olduğunu görüyor. Buna göre evdeki saat kaç dakika geri alınmıştır?

Cevap: 13. Evdeki saat x dakika geri alınmış olsun. Okuldan eve dönüşün y dakika sürdüğünü kabul edelim, bu durumda evden okula gidiş $3y$ dakika sürmüştür. Verilen bilgilerden $x+3y=40$ ve $x-y=4$ olduğunu buluruz. Buradan, $y=9$ ve $x=13$ bulunur.

26. Özdeş olan 7 kurşun kalem ve birbirinden farklı 5 tükenmez kalem, her kutuda aynı sayıda kalem olacak biçimde 6 farklı kutuya kaç farklı şekilde dağıtılır?

Cevap: 6120. Her kutuda tam olarak iki kalem bulunacağından, 5 farklı tükenmez kalem kutulara $(1,2,2,0,0,0)$, $(2,1,1,1,0,0)$ veya $(1,1,1,1,1,0)$ şeklinde paylaştırılabilir. Dolayısıyla toplam

$$\underbrace{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}_{\text{kutu seçimi}} \cdot \underbrace{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}_{\text{kalem seçimi}} + \underbrace{\binom{6}{1}\binom{5}{3}}_{\text{kutu seçimi}} \cdot \underbrace{\binom{5}{2}3!}_{\text{kalem seçimi}} + \underbrace{\binom{6}{5}}_{\text{kutu seçimi}} \underbrace{5!}_{\text{kalem seçimi}} = 6120$$

şekilde dağıtılabilir.

27. $ABCD$ paralelkenarının iç bölgesinde $s(\widehat{AEB}) + s(\widehat{DEC}) = 180^\circ$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $s(\widehat{DAE}) = 50^\circ$ ise $s(\widehat{DCE}) =$?

Cevap: 50°. C den BE ye çizilen paralel ile D den AE ye çizilen paralelin kesişim noktası F olsun. CFD ve BEA üçgenleri eş olacağından $s(\widehat{CFD}) + s(\widehat{CED}) = 180^\circ$ olup $CFDE$ kirişler dörtgeni olur. Buradan, $s(\widehat{DCE}) = s(\widehat{EFD})$ elde ederiz. Diğer taraftan, $|AE| = |DF|$ ve $AE \parallel DF$ olduğundan $EFDA$ paralelkenar olup $s(\widehat{EFD}) = s(\widehat{DAE}) = 50^\circ$ olur. Sonuç olarak, $s(\widehat{DCE}) = s(\widehat{DAE}) = 50^\circ$ bulunur.

28. f gerçel (reel) sayılarda tanımlı bir fonksiyon olsun.
$f(xy - x - y + 1) = f(xy) + f(x) - f(y) + 6x - 3$ ve $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1$ ise $f(33) =$?

Cevap: -97. Verilen eşitlikte $x = 1$ yazdığımızda $f(0) = f(1) + 3$, ve $y = 1$ yazdığımızda $f(0) = f(x) + f(x) - f(1) + 6x - 3$ elde ederiz. Buradan, $f(0) + f(1) = 2f(x) + 6x - 3$ ve $f(0) - f(1) = 3$ eşitliklerini taraf tarafa topladığımızda, $f(x) = f(0) - 3x$ olduğu görülür. Daha sonra $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1$ eşitliğini kullanarak $f(0) = 2$ ve dolayısıyla $f(x) = 2 - 3x$ elde ederiz (bu fonksiyonun şartları sağladığı kolayca görülebilir). Sonuç olarak $f(33) = 2 - 3 \cdot 33 = -97$ bulunur.

29. n, 2'den büyük pozitif bir tam sayı olmak üzere, n'den n^2'ye kadar olan sayıların toplamı A olsun. Buna göre $\dfrac{A}{n} =$?

Cevap: $\dfrac{n^3+1}{2}$. Her k pozitif tam sayısı için 1 den k ye kadar olan pozitif tam sayıların toplamı $\dfrac{k(k+1)}{2}$ olduğu için, $A = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2} - \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n(n^3+1)}{2}$ ve dolayısıyla $\dfrac{A}{n} = \dfrac{n^3+1}{2}$ elde edilir.

30. Her $k = 1, 2, 3, 4$ için $-4 \le x_k \le 6$ olsun. Bu koşul altında $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ denklemini gerçekleyen kaç farklı (x_1, x_2, x_3, x_4) tam sayı dörtlüleri vardır?

Cevap: 745. Her $k = 1, 2, 3, 4$ için $y_k = x_k + 4$ olsun. $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ şartını sağlayan ve 10 u aşmayan doğal sayı dörtlülerinin sayısını bulmalıyız. İstenmeyen durumda y_i sayılarından en fazla biri 11 den büyük veya eşit olabileceğinden cevap $\binom{16+4-1}{4-1} - 4 \cdot \binom{5+4-1}{4-1} = 745$ farklı tam sayı dörtlüsü vardır.

31. $\widehat{A}$ açısı dik olan ABC üçgeninde AB kenarı üzerinde, BCD ve ADC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları eşit olacak şekilde bir D noktası alınıyor.
$|AB| = 6$, $|AC| = 8$ ise $|AD| =$?

Cevap: $2\sqrt{2}$. $|AD| = x$, $|DC| = y$ ve eşit olan iç yarıçaplara r diyelim. DAC dik üçgen olduğundan $\dfrac{x+8-y}{2} = r$ olur. Diğer taraftan, $s(\widehat{ACB}) = 2\alpha$ dersek, DBC üçgenindeki değme noktasını düşündüğümüzde $\dfrac{(6-x)+10-y}{2} = \dfrac{r}{\tan(45-\alpha)}$ elde ederiz. $\tan\alpha = t$ diyelim. $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha = \dfrac{3}{4}$ olduğundan $3t^2 + 8t - 3 = 0$ ve buradan da $t = \dfrac{1}{3}$ buluruz. Dolayısıyla $\dfrac{(6-x)+10-y}{2} = \dfrac{r}{\tan(45-\alpha)} = \dfrac{r}{\frac{1-t}{1+t}} = 2r$ buluruz. Sonuç olarak, $16 - x - y = 2(x + 8 - y)$ olması $y = 3x$ olduğunu gösterir. ADC üçgeninde Pisagor teoreminden $9x^2 - x^2 = 64$ ve $x = 2\sqrt{2}$ bulunur.

32. $(1^2+1)1!+(2^2+1)2!+(3^2+1)3!+...+(2016^2+1)2016!+(2017^2+1)2017! =?$

Cevap: $2017 \cdot 2018!$. Her n pozitif tam sayısı için,

$$(n^2+1)n! = (n^2+n-n+1)n! = n(n+1)! - (n-1)n!$$

olduğundan, $b_n = n(n+1)!$ dersek, $(n^2+1)n! = b_n - b_{n-1}$ olur. Buradan verilen işlemin sonucu $(b_1-b_0)+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+...(b_{2017}-b_{2016}) = b_{2017}-b_0$ olur. Dolayısıyla cevap $2017 \cdot 2018! - 0 \cdot 1! = 2017 \cdot 2018!$ dir.